Доклады Академии Наук СССР
1943. Том XXXVIII, № 8

ФИЗИКА

В. А. АМБАРЦУМИАН, член-корреспондент Академии Наук СССР

К ВОПРОСУ О ДИФФУЗНОМ ОТРАЖЕНИИ СВЕТА МУТНОЙ СРЕДОЙ

(*Представлено академиком С. И. Вавиловым 6 I 1943*)

Вопрос о диффузном отражении света мутной средой, т. е. средой, производящей рассеяние и поглощение света, служил предметом многочисленных исследований. Для решения этой физической задачи до сих пор всегда применялся один и тот же метод, заключающийся в анализе светового режима внутри мутной среды и в последующем вычислении, на основании полученных таким путем данных, интенсивностей выходящего из среды, т. е. диффузно-отраженного, излучения. К сожалению, этот метод до сих пор не дал полного решения рассматриваемой задачи.

В настоящей заметке мы дадим другой метод решения вопроса о диффузном отражении света. Оказывается, что новый метод гораздо более эффективен, чем старый, приводивший к линейному интегральному уравнению. Новый метод не прибегает к вычислению величин, характеризующих световой режим внутри среды, и позволяет ограничиться анализом условий на ее границе.

Пусть среда состоит из плоскопараллельных слоев и каждый элемент ее обладает рассеивающей и поглощающей способностью. Отношение коэффициента рассеяния к коэффициенту поглощения мы обозначим через $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ и будем считать величиной постоянной во всей среде. Пусть далее индикатрисса рассеяния элемента объема имеет сферическую форму. Иными словами, излучение, рассеиваемое данным элементом объема, рассеивается равномерно по всем направлениям.

Наконец, примем пока, что среда ограничена с одной стороны некоторой плоскостью A, а с другой — уходит в бесконечность, и оптическая толщина ее бесконечно велика. В конце заметки мы остановимся на случае среды конечной оптической толщины.

Пусть на границу A падают параллельные лучи. Обозначим через ξ косинус угла между направлением падающих лучей и внутренней нормалью к слоям. Пусть поток этого излучения, проходящий через единичную площадку, перпендикулярную к его направлению, в единицу времени равен πS. В результате рассеяний, вообще говоря многократных, свет будет выходить из среды в разных направлениях с некоторой интенсивностью I, зависящей от угла, образованного направлением выходящего луча с нормалью, косинус которого обозначим через η, а также от ξ.

Очевидно, что функция $I(\eta, \xi)$ будет пропорциональна S.

$$I(\eta, \xi) = r(\eta, \xi) S.$$

Функцию $r(\eta, \xi)$, характеризующую отражение света, мы и будем искать.

Заметим, что если к границе A среды бесконечной оптической толщины присодинить дополнительно слой малой оптической толщины $\Delta\tau$, состоящий из материи, обладающей теми же оптическими свойствами, то новая суммарная среда будет обладать диффузным отражением, характеризующимся той же функцией $r(\eta; \xi)$. Это свойство инвариантности по отношению к прибавлению дополнительного слоя мы и используем для вывода уравнения, которому должна удовлетворять искомая функция $r(\eta, \xi)$. В дальнейших расчетах мы будем принимать $\Delta\tau$ столь малым, что квадратом его можно пренебрегать.

В результате прибавления слоя $\Delta\tau$ мы будем иметь новую границу A' среды. На прежнюю границу A теперь уже будет падать ослабленный поток прямых лучей, т. е. не πS, а $\pi S\left(1 - \frac{\Delta\tau}{\xi}\right)$. В соответствии с этим, из этого потока будет отражаться от границы A излучение с интенсивностью $r(\eta, \xi) S\left(1 - \frac{\Delta\tau}{\xi}\right)$. Но при выходе этого излучения через слой $\Delta\tau$ произойдет его ослабление в $1 - \frac{\Delta\tau}{\eta}$ раз. Таким образом, из падающего на границу A прямого излучения отражается наружи только излучение с интенсивностью

$$r(\eta, \xi)\left(1 - \frac{\Delta\tau}{\xi}\right)\left(1 - \frac{\Delta\tau}{\eta}\right) S,$$

С другой стороны, введение слоя $\Delta\tau$ приводит к появлению дополнительного излучения в направлении η. Оно состоит из четырех частей:

1) Слой $\Delta\tau$ рассеивает часть проходящих через него прямых лучей, направляя их также и в направлении η. Полученное приращение интенсивности равно

$$\frac{\lambda}{4} \frac{\Delta\tau}{\eta} S.$$

2) Часть рассеяннных слоем $\Delta\tau$ прямых лучей направляется в сторону границы A и от нее частично отражается. Соответствующее приращение интенсивности равно .

$$\frac{\lambda}{2} \Delta\tau S \int_0^1 r(\eta, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

3) Слой $\Delta\tau$ рассеивает отраженное излучение, идущее от поверхности A. Соответствующее приращение интенсивности равно

$$\frac{\lambda}{2}\,\frac{\Delta\tau}{\eta}\,S\int_0^1 r(\zeta,\,\xi)\,d\zeta.$$

4) Часть излучения, отраженного от поверхности A, рассеивается слоем $\Delta\tau$ обратно и снова отражается частично поверхностью A. В результате интенсивность получит приращение

$$\lambda\Delta\tau S\int_0^1 r(\zeta,\,\xi)\,d\zeta\int_0^1 r(\eta,\,\zeta')\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}.$$

Теперь напишем условие, выражающее тот факт, что в результате всех приращений и убылей, выходящих с поверхности A', интенсивность остается равной $r(\eta,\,\xi)S$

$$r(\eta,)\,\xi = r(\eta,\,\xi)\left(1-\frac{\Delta\tau}{\xi}-\frac{\Delta\tau}{\eta}\right)+\frac{\lambda}{4}\,\frac{\Delta\tau}{\eta}+\frac{\lambda}{2}\,\frac{\Delta\tau}{\eta}\int_0^1 r(\zeta,\,\xi)\,d\zeta+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\Delta\tau\int_0^1 r(\eta,\,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+\lambda\Delta\tau\int_0^1 r(\zeta,\,\xi)\,d\zeta\int_0^1 r(\eta,\,\zeta')\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}$$

или

$$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\xi}\right)r(\eta,\,\xi)=\frac{\lambda}{4}\left\{\frac{1}{\eta}+2\int_0^1 r(\eta,\,\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{2}{\eta}\int_0^1 r(\zeta,\,\xi)\,d\zeta+\right.$$

$$\left.+4\int_0^1 r(\eta,\,\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'}\int_0^1 r(\zeta,\,\xi)\,d\zeta\right\}.$$

Введем функцию $R(\eta,\,\xi)$, определенную через

$$r(\eta,\,\xi)=\frac{\lambda}{4\eta}R(\eta,\,\xi). \tag{1}$$

Тогда для $R(\eta,\,\xi)$ имеем функциональное уравнение

$$\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\xi}\right)R(\eta,\,\xi)=1+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 R(\eta,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 R(\zeta,\,\xi)\,\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{\lambda^2}{4}\int_0^1 R(\eta,\,\zeta')\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}\int_0^1 R(\zeta,\,\xi)\,\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{2}$$

Очевидно, что если этому уравнению удовлетворяет функция $R(\eta,\,\xi)$, то ему же должна удовлетворять функция $R(\xi,\,\eta)$. Так как наша физическая задача должна иметь только одно решение, то возникает мысль искать решение уравнения (2) в виде симметричной функции

$$R(\eta, \xi) = R(\xi, \eta). \tag{3}$$

Но при этом условии правая часть (2) оказывается произведением двух одинаковых функций

$$\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\xi}\right) R(\eta, \xi) = \left\{1+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 R(\eta, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}\left\{1+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 R(\xi, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}. \tag{4}$$

Обозначим

$$\varphi(\eta) = 1+\frac{\lambda}{2}\int_0^1 R(\eta, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{5}$$

Тогда (4) и (5) сразу дают структуру функций $R(\eta, \xi)$ и $r(\eta, \xi)$:

$$R(\eta, \xi) = \frac{\varphi(\eta)\varphi(\xi)}{\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\xi}}; \quad r(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{4}\xi\frac{\varphi(\eta)\varphi(\xi)}{\eta+\xi}. \tag{6}$$

Подстановка (6) в (5) дает уравнение для функции $\varphi(\eta)$

$$\varphi(\eta) = 1+\frac{\lambda}{2}\eta\varphi(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\eta+\xi}. \tag{7}$$

Итак, мы приходим к выводу: функция $r(\eta, \xi)$, характеризующая отражательную способность, имеет структуру, выражаемую формулой (6). Функция $\varphi(\eta)$ определяется при этом функциональным уравнением (7).

Поскольку в рассматриваемой физической задаче всегда $\lambda \leqslant 1$, уравнение (7) может быть легко решено численно, методом последовательных приближений. Тем самым рассматриваемая задача о диффузном отражении от бесконечно толстого слоя решается до конца.

Спрашивается, можно ли выведенные в настоящей работе функциональные уравнения (2) и (7) получить не из приведенных физических соображений, а чисто формально, из обычного интегрального уравнения теории рассеяния. В статье автора, печатающейся в другом месте, дан такой формальный вывод. Там же приведены результаты численного решения уравнения (7) с тремя знаками.

Все сказанное выше относилось к диффузному отражению света средой бесконечной оптической глубины. Однако изложенный метод может быть обобщен на среду конечной оптической глубины τ, т. е. на слой, ограниченный с двух сторон граничными плоскостями A и B. При этом наряду с функцией $r(\eta, \xi)$, характеризующей диффузное отражение, ищется и функция $s(\eta, \xi)$, характеризующая диффузное пропускание и дающая интенсивность света, исходящего с поверхности B в направлении η, когда на поверхность A падает прямое излучение в направлении ξ.

В этом случае для получения решения используется инвариантность искомых функций $r(\eta, \xi)$ и $s(\eta, \xi)$ по отношению к такому преобразованию, когда у границы A прибавляется слой $\Delta\tau$ и одновременно у границы B отнимается слой такой же оптической толщины $\Delta\tau$.

Оказывается, что в этом случае искомые функции выражаются через две вспомогательных функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$, каждая из которых зависит лишь от одной переменной:

$$\left.\begin{aligned} r(\eta, \xi) &= \frac{\lambda}{4}\,\xi\,\frac{\varphi(\eta)\varphi(\xi)-\psi(\eta)\psi(\xi)}{\eta+\xi} \\ s(\eta, \xi) &= \frac{\lambda'}{4}\,\xi\,\frac{\psi(\eta)\varphi(\xi)-\varphi(\eta)\psi(\xi)}{\eta-\xi}\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Вспомогательные функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ определяются из системы двух функциональных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1+\frac{\lambda}{2}\,\eta\varphi(\eta)\int\limits_0^1\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\eta+\xi}-\frac{\lambda}{2}\,\eta\psi(\eta)\int\limits_0^1\frac{\psi(\xi)\,d\xi}{\eta+\xi} \\ \psi(\eta) &= e^{-\frac{\tau}{\eta}}+\frac{\lambda}{2}\,\eta\int\limits_0^1\frac{\psi(\eta)\varphi(\xi)-\varphi(\eta)\psi(\xi)}{\eta-\xi}\,d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Численное решение этой системы может быть получено также методом последовательных приближений.

Филиал Ленинградского
государственного университета

Поступило
9 XII 1942